الجبر الخطي والهندسة التحليلية

المستوى الثاني تقانة

المحاضرة الرابعة

منقول (أو تدوير) المصفوفات:

إن منقول المصفوفة (أو مدور المصفوفة) هو مصفوفة جديدة نحصل عليها بتحويل أسطر المصفوفة إلى أعمدة وأعمدة المصفوفة إلى أسطر، مع الاحتفاظ بترتيب مواضع العناصر.

فإذا فرضنا أن لدينا المصفوفة $X_{(m,n)}$ التي لها m سطراً و n عموداً فإن منقولها (أو مدورها) ولنرمز له بالرمز $X'_{(m,n)}$ سيكون مصفوفة لها n سطراً و m عموداً كما يلي:

$$X_{(m,n)} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \vdots & & & & & \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

$$X'_{(m,n)} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{i1} & \dots & x_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{i2} & \dots & x_{m2} \\ \vdots & & & & & \\ x_{1j} & x_{2j} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{mj} \\ \vdots & & & & & \\ x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{in} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال لتكن لدينا المصفوفة $X_{(4,3)}$ على النحو التالي:

$$X_{(4,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

إن منقول هذه المصفوفة هو:

$$X'_{(3.4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

ة:

مدور مجموع مصفوفتين يساوي مجموع مدور المصفوفة الولي مع مدور الثانية:

$$[X_{(m,n)} + Y_{(m,n)}]' = X'_{(m.n)} + Y'_{(m,n)}$$

مدور ضرب مصفوفة بعدد حقيقي يساوي العدد الحقيقي مضروباً بمدور المصفوفة:

$$.(a.X_{(m,n)})' = a.X'_{(m,n)}$$

مدور ضرب مصفوفتين يساوي ضرب مدوريهما بعد تبديل مكاني المصفوفتين في الضرب وتبديل ادلة كل منهما:

$$[X_{(m,n)} \times Y_{(n,p)}]' = Y'_{(n,p)} \times X'_{(m,n)}$$

مدور مدور مصفوفة هو المصفوفة الأصلية، أي أن:

$$(X'_{(m,n)})' = X_{(m,n)}$$

ملاحظة (1):

إذا كانت المصفوفة $S_{(n,n)}$ متناظرة فإنها تساوي مدورها:

$$S_{(n,n)} = S'_{(n,n)}$$

وإذا كانت المصفوفة $A_{(n,n)}$ متعاكسة التناظر فإنها تساوي مدورها مضروبًا بـ 1-:

$$A_{(n,n)} = -A'_{(n,n)}$$

ملاحظة (2):

مقابل كل مصفوفة مربعة $M_{(n,n)}$ يمكن إيجاد مصفوفتين، الأولى متناظرة $S_{(n,n)}$ والثانية متعاكسة التناظر $A_{(n,n)}$.

للتحقق من صحة هذه القاعدة لنفرض أننا استطعنا كتابة المصفوفة المربعة المفروضة $M_{(n,n)}$ على صورة مجموع المصفوفتين المتناظرة $S_{(n,n)}$ ومتعاكسة التناظر $A_{(n,n)}$:

$$M_{(n,n)} = S_{(n,n)} + A_{(n,n)} \qquad \text{(I)}$$

ولنحاول إيجاد كل من هاتين المصفوفتين $S_{(n,n)}$ و $A_{(n,n)}$.

لنأخذ مدور المصفوفات في كل طرف من العلاقة السابقة فنجد:

$$M'_{(n,n)} = S'_{(n,n)} + A'_{(n,n)}$$

وبما أن $S_{(n,n)}$ مصفوفة متناظرة و $A_{(n,n)}$ مصفوفة متعاكسة التناظر فسيكون:

$$S'_{(n,n)} = S_{(n,n)} \ , \ A'_{(n,n)} = -A_{(n,n)}$$

لهذا سيكون:

$$M'_{(n,n)} = S_{(n,n)} - A_{(n,n)} \qquad \text{(II)}$$

– إذا جمعنا المعادلتين (I) و (II) طرفاً لطرف نجد:

$$M_{(n,n)} + M'_{(n,n)} = 2S_{(n,n)}$$

ومنه فإن المصفوفة المتناظرة $S_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$M_{(n,n)} + M'_{(n,n)} = 2S_{(n,n)}$$

ومنه فإن المصفوفة المتناظرة $S_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$S_{(n,n)} = \frac{1}{2}[M_{(n,n)} + M'_{(n,n)}]$$

– وإذا طرحنا المعادلتين (I) و(II) طرفاً من طرف نجد:

$$M_{(n,n)} - M'_{(n,n)} = 2A_{(n,n)}$$

فالمصفوفة متعاكسة التناظرِ $A_{(n,n)}$ التي نحصل عليها من المصفوفة $M_{(n,n)}$ ستكون:

$$A_{(n,n)} = \frac{1}{2}[M_{(n,n)} - M'_{(n,n)}]$$

مثال

لنوجد المصفوفتين، المتناظرة ومتعاكسة التناظرِ من المصفوفة الآتية:

$$M_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة المتناظرة $S_{(4,4)}$ هي:

$$S_{(4,4)} = \frac{1}{2}\left[M_{(4,4)} + M^{t}_{(4,4)}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 4 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة متعاكسة التناظر $A_{(4,4)}$ هي:

$$A_{(4,4)} = \frac{1}{2}[M_{(4,4)} - M^{t}_{(4,4)}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$